2. Чешкова М.А. К геометрии диффеоморфных n-поверхностей в E_{2n} // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.114-116.

УДК 514.76

СВЯЗНОСТИ ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Ю.И.Шевченко

(Калининградский государственный университет)

Введены понятия голономного и неголономного дифференцируемых многообразий, установлена связь между кручением линейной связности, голономностью и оснащением многообразия. Показано, что объекты кручения и кривизны линейной связности голономного многообразия, а также объекты кривизны геометрической связности в составном голономном многообразии и групповой связности в главном голономном расслоении являются тензорами.

1. Расслоения реперов. Структурные уравнения n-мерного дифференцируемого многообразия V имеют вид [1]:

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J \quad (I, J, K, L, M = \overline{1,n}), \tag{1}$$

где $\omega^I = x^I_J\, dx^J$, dx^J - дифференциалы некоторых локальных координат x^J точки $x \in V$, матрица коэффициентов x^I_J невырожденна: $\det(x^I_J) \neq 0$. Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^I = 0$ фиксирует точку x:

$$\omega^I = 0 \Leftrightarrow dx^J = 0 \Leftrightarrow x^J = const. \tag{2}$$

Дифференцируя уравнения (1) внешним образом и разрешая по обобщенной [1] лемме Картана, получим

$$d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge \omega^I_{JK}, \tag{3}$$

причем

$$\omega^I_{JK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0. \tag{4}$$

Условия (4) выполняются в голономном случае:

$$\omega^I_{[JK]} = 0, \tag{5}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование по крайним индексам в них. Однако равенства (5) не являются необходимыми [1, с.142] для выполнения условий (4).

Над многообразием V возникает так называемое главное расслоение реперов $L(V)$ со структурными уравнениями (1), (3), типовым слоем которого является линейная группа $L = GL(n)$, $\dim L = n^2$. Структурные уравнения группы L получаются из уравнений (3):

$$d\pi^I_J = \pi^K_J \wedge \pi^I_K \qquad (\pi = \omega|_{\omega^I=0}) \tag{6}$$

Продолжая уравнения (3), найдем

$$d\omega^I_{JK} = \omega^L_{JK} \wedge \omega^I_L - \omega^I_{LK} \wedge \omega^L_J - \omega^I_{JL} \wedge \omega^L_K + \omega^L \wedge \omega^I_{JKL}, \tag{7}$$

причем

$$\omega^I_{JKL} \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0$$

Для справедливости последних равенств достаточно выполнение условий полуголономности:

$$\omega^I_{J[KL]} = 0 \tag{8}$$

или, более того, условий голономности - симметричности форм ω^I_{JKL} по всем нижним индексам [1].

Структурные уравнения (1), (3), (7) показывают, что над многообразием V построено главное расслоение неголономных реперов 2-го порядка $\tilde{L}^2(V)$, типовым слоем которого служит неголономная [2] дифференциальная группа 2-го порядка $\tilde{L}^2 \supset L$, $\dim \tilde{L}^2 = n^2(1+n)$. Группа $\tilde{L}^2$ имеет структурные уравнения (6) и следующие

$$d\pi^I_{JK} = \pi^L_{JK} \wedge \pi^I_L - \pi^I_{LK} \wedge \pi^L_J - \pi^I_{JL} \wedge \pi^L_K.$$

Если выполняются условия (5), то из расслоения $\tilde{L}^2(V)$ выделяется подрасслоение голономных реперов $L^2(V)$ с типовым слоем - голономной [1] дифференциальной группой 2-го порядка

$$L^2 \subset \tilde{L}^2, \quad \dim L^2 = n^2 + n\,(C^2_n + n) = \tfrac{1}{2} n^2 (n+3).$$

Далее вводится расслоение неголономных реперов 3-го порядка $\tilde{L}^3(V)$ со структурными формами $\omega^I, \omega^I_J, \omega^I_{JK}, \omega^I_{JKL}$ и типовым слоем - неголономной дифференциальной группой 3-го порядка $\tilde{L}^3 \supset \tilde{L}^2$, $\dim \tilde{L}^3 = n^2(1+n+n^2)$. Если справедливы условия (5), (8), то из расслоения $\tilde{L}^3(V)$ получается расслоение полуголономных реперов $\bar{L}^3(V)$ с типовым слоем - полуголономной [13], [14] дифференциальной группой 3-го порядка $\bar{L}^3 \subset \tilde{L}^3$,

$$\dim \bar{L}^3 = \dim \tilde{L}^3 - n\,(1+n)\,C^2_n = \tfrac{1}{2} n^2 (n^2 + 2n + 3).$$

Если выполняются условия (5) и формы ω^I_{JKL} симметричны по всем нижним индексам, то из расслоения полуголономных реперов $\bar{L}^3(V)$ выделяется расслоение голономных реперов $L^3(V)$ с типовым слоем – голономной дифференциальной группой 3-го порядка $L^3 \subset \bar{L}^3$,

$$\dim L^3 = \dim L^2 + n\,(C_n^3 + 2C_n^2 + n) = \frac{n^2}{6}\cdot(n^2+6n+11).$$

На этом пути [1], [2] получаются расслоения неголономных, полуголономных и голономных реперов произвольного порядка p $(p=1,2,\dots)$, причем с помощью работы [1, с.149, 164] вычисляется $\dim L^p = n\,(C_{n+p}^p - 1)$.

З а м е ч а н и е: 1) Ю.Г.Лумисте более общим способом присоединяет к многообразию расслоение неголономных реперов под названием полуголономных корепероа [3] или соприкасающихся сверхреперов [4].

2. Голономные и неголономные многообразия. Известно, что в любой точке $x\in V$, касательное пространство T к многообразию V является n-мерным векторным пространством, а дифференциал точки x есть вектор. Для вектора $dx\in T$ справедливо разложение [5, с.54]:

$$dx = \omega^J e_J\,, \tag{9}$$

где e_J – векторы подвижного репера пространства T. Имеем:

$$\omega^J = 0 \;\Leftrightarrow\; dx = 0 \;\Leftrightarrow\; x = const\,,$$

что соответствует эквивалентностям(2).

Продолжая уравнение (9), найдем [5, с.56]:

$$de_J = \omega_J^{\mathcal{J}} e_{\mathcal{J}} + \omega^{\mathcal{J}} e_{J\mathcal{J}}\,, \tag{10}$$

причем новые векторы $e_{J\mathcal{J}}$ симметричны в силу леммы Картана, используемой при получении их координат, т.е.

$$e_{[J\mathcal{J}]} = 0\,. \tag{11}$$

Из уравнений (10) при фиксации точки x имеем

$$\delta e_J = \pi_J^{\mathcal{J}} e_{\mathcal{J}} \qquad (\delta = d|_{\omega^J=0})\,. \tag{12}$$

Значит, линейная группа L со структурными формами $\pi_{\mathcal{J}}^J$ действует в множестве векторов e_J, т.е. в касательном пространстве T. Из уравнений (10) следует также, что

$$e_{J\mathcal{J}} \in T^2 \subset T^2(V) = T(T(V))\,, \tag{13}$$

где T^2 – касательное пространство 2-го порядка или соприкасающееся пространство, $T(V)$ – касательное расслоение над многообразием V, $T(T(V))$ – касательное расслоение над касательным расслоением $T(V)$ или касательное расслоение 2-го порядка $T^2(V)$ над многообразием V. Пространство $T^2\supset T$ имеет размерность

$$\dim T^2 = \dim T + C_n^2 + n = \tfrac{1}{2}\,n(n+3).$$

Продолжая уравнения (10), найдем

$$de_{J\mathcal{J}} = \omega_{J\mathcal{J}}^{x} e_x + \omega_J^{x} e_{x\mathcal{J}} + \omega_{\mathcal{J}}^{x} e_{Jx} + \omega^{x} e_{J\mathcal{J}x}\,, \tag{14}$$

причем

$$e_{J[\mathcal{J}K]} = 0\,. \tag{15}$$

Из уравнений (14) с учетом условий (11) получим равенства (5), а также $e_{[J\mathcal{J}]K} = 0$. Откуда и из соотношений (15) следует симметричность векторов $e_{J\mathcal{J}K}\in T^3$ по всем индексам [5, с.56]. Таким образом, размерность касательного пространства 3-го порядка T^3:

$$\dim T^3 = \dim T^2 + C_n^3 + 2C_n^2 + n = \frac{1}{6}\,n\,(n^2+6n+11).$$

Из уравнений (14) следует

$$\delta e_{J\mathcal{J}} = \pi_{J\mathcal{J}}^{x} e_x + \pi_J^{x} e_{x\mathcal{J}} + \pi_{\mathcal{J}}^{x} e_{Jx}\,. \tag{16}$$

Уравнения (5), (12), (16) показывают, что в пространстве T^2, отнесенном к подвижному реперу 2-го порядка $\{e_J, e_{J\mathcal{J}}\}$, действует голономная дифференциальная группа 2-го порядка $L^2\supset L$ со структурными формами $\pi_J^{\mathcal{J}}$, $\pi_{J\mathcal{J}}^{x}$ $(\pi_{[J\mathcal{J}]}^{x} = 0)$.

Продолжая уравнения (14), найдем

$$\nabla e_{J\mathcal{J}K} = \omega_{J\mathcal{J}K}^{L} e_L + \omega_{J\mathcal{J}}^{L} e_{LK} + \omega_{JK}^{L} e_{L\mathcal{J}} + \omega_{\mathcal{J}K}^{L} e_{JL} + \omega^{L} e_{J\mathcal{J}KL}\,, \tag{17}$$

причем

$$\nabla e_{J\mathcal{J}K} = de_{J\mathcal{J}K} - \omega_J^{L} e_{L\mathcal{J}K} - \omega_{\mathcal{J}}^{L} e_{JLK} - \omega_K^{L} e_{J\mathcal{J}L}\,,$$

$$e_{J\mathcal{J}[KL]} = 0 \qquad (e_{J\mathcal{J}KL}\in T^4). \tag{18}$$

Из уравнений (17) с учетом симметрии векторов $e_{J\mathcal{J}K}$ получается симметрия форм $\omega_{J\mathcal{J}K}^{L}$ по нижним индексам и векторов $e_{J\mathcal{J}KL}$ по трем первым индексам. С помощью соотношений (18) обнаруживается симметрия векторов $e_{J\mathcal{J}KL}$ по всем индексам. Следовательно, в касательном пространстве 3-го порядка $T^3\supset T^2$ действует голономная дифференциальная группа L^3, а касательное пространство 4-го порядка $T^4\supset T^3$ имеет размерность

$$\dim T^4 = \dim T^3 + C_n^4 + 3C_n^3 + 3C_n^2 + n = \frac{n}{24}\,(n^3+10n^2+35n+50).$$

Аналогичная картина наблюдается и при следующих продолжениях, причем

$$\dim T^p = \tfrac{1}{n}\dim L^p = C_{n+p}^p - 1 \qquad (L^1 = L\,,\;\; T^1 = T).$$

8 Зак. 1296

Откажемся от неявного предположения, что dx – полный дифференциал (ср. [6, с.20]). Исследуем общий случай, когда внешний дифференциал от dx не равен нулю. Уравнение (9) приобретет иной смысл, т.к. его не удастся продолжить прежним образом и получить уравнения (10). Тем не менее сохраним уравнения (10), но допустим, что в них дифференциалы de_I могут быть неполными, а векторы e_{IJ} – несимметричными. Подобный взгляд распространим на структурные уравнения (14), (17) и т.д. Тогда нельзя доказать симметричность векторов e_{IJK}, $e_{IJKL}, \dots$ и форм ω^I_{JK}, $\omega^I_{JKL}, \dots$ по нижним индексам.

Определение. Если все дифференциалы $dx, de_I, de_{IJ}, \dots$ в формулах (9), (10), (14),... являются полными, т.е. внешние дифференциалы от них равны нуль-вектору, то дифференцируемое многообразие называется голономным; если же эти дифференциалы – неполные, то многообразие – неголономное.

В этом пункте фактически рассматривалось голономное многообразие V и его касательные пространства T^p. В неголономном случае многообразие и касательные пространства будем обозначать теми же буквами с волной: $\tilde V, \tilde T^p$, причем

$$\dim \tilde T^p = \frac{1}{n} \dim \tilde L^p = n(1+n+n^2+\dots+n^{p-1}) = \frac{n(n^p-1)}{n-1} \qquad (n>1).$$

Теорема 1. С голономным многообразием V ассоциируется последовательность расслоений голономных реперов $L^p(V)$ порядков $p=1,2,\dots$; типовым слоем каждого расслоения $L^p(V)$ над многообразием V является голономная дифференциальная группа L^p, действующая в касательном пространстве T^p, отнесенном к подвижному реперу $\{e_I, e_{I_1 I_2}, \dots, e_{I_1\dots I_p}\}$, где все векторы симметричны при перестановках любых индексов.

Аналогично к неголономному многообразию $\tilde V$ $(n>1)$ присоединяются расслоения неголономных реперов $\tilde L^p(\tilde V)$ с типовыми слоями – неголономными дифференциальными группами $\tilde L^p$, действующими в касательных пространствах $\tilde T^p$.

Замечания: 2) равенства (9), (10) поясняют, почему касательное пространство к многообразию в точке x наделяют структурой центроаффинного пространства с центром x; аналогично поступают [7] с касательными пространствами высшего порядка; 3) утверждение (13) получается иначе, если продифференцировать формулу (9) обычным образом:

$$d^2x = (d\omega^I + \omega^J\omega^I_J)e_I + \omega^I\omega^J e_{IJ},$$

где $d\omega^I$ – обычный дифференциал в отличие от равенств (1) с внешним дифференциалом.

3. Линейная связность. Рассмотрим расслоение линейных реперов $L(\tilde V)$ со структурными уравнениями (1), (3) над неголономным многообразием $\tilde V$. Фундаментально-групповую связность в главном расслоении $L(\tilde V)$, называемую аффинной или линейной связностью, зададим способом Лаптева с помощью форм $\tilde\omega^I_J = \omega^I_J - \Gamma^I_{JK}\omega^K$, где Γ^I_{JK} – некоторые функции. Найдем внешние дифференциалы этих форм:

$$d\tilde\omega^I_J = \tilde\omega^K_J \wedge \tilde\omega^I_K + \omega^K \wedge (\nabla\Gamma^I_{JK} + \omega^I_{JK}) - \Gamma^M_{J[K}\Gamma^I_{ML]}\omega^K \wedge \omega^L, \qquad (19)$$

где

$$\nabla\Gamma^I_{JK} = d\Gamma^I_{JK} + \Gamma^L_{JK}\omega^I_L - \Gamma^I_{LK}\omega^L_J - \Gamma^I_{JL}\omega^L_K.$$

Согласно теореме Картана–Лаптева [8] линейная связность задается полем объекта Γ^I_{JK}:

$$\nabla\Gamma^I_{JK} + \omega^I_{JK} = \Gamma^I_{JKL}\omega^L. \qquad (20)$$

Тогда уравнения (19) принимают вид

$$d\tilde\omega^I_J = \tilde\omega^K_J \wedge \tilde\omega^I_K + R^I_{JKL}\omega^K \wedge \omega^L,$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формуле

$$R^I_{JKL} = \Gamma^I_{J[KL]} - \Gamma^M_{J[K}\Gamma^I_{ML]}.$$

Введем формы связности $\tilde\omega^I_J$ в уравнения (1):

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \tilde\omega^I_J + S^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K,$$

где $S^I_{JK} = \Gamma^I_{[JK]}$ – объект кручения линейной связности. Альтернируем уравнения (20):

$$\nabla S^I_{JK} + \omega^I_{[JK]} = \Gamma^I_{[JK]L}\omega^L.$$

Теорема 2. Объект кручения S^I_{JK} линейной связности голономного многообразия V является тензором, а на неголономном многообразии $\tilde V$ объект кручения S^I_{JK}, вообще говоря, не образует тензор.

Следовательно, для голономного многообразия V равенства $S^I_{JK}=0$ имеют инвариантный смысл и выделяют линейную связность без кручения или симметрическую линейную связность. В неголономном случае равенства $S^I_{JK}=0$ не инвариантны, т.е. симметрическая линейная связность неголономного многообразия $\tilde V$ в общем случае не существует.

Преобразуем уравнения (10):

$$de_J = \tilde{\omega}_J^{\mathcal{J}} e_{\mathcal{J}} + \omega^{\mathcal{J}} E_{J\mathcal{J}} \qquad (E_{J\mathcal{J}} = e_{J\mathcal{J}} + \Gamma^{K}_{J\mathcal{J}} e_K). \qquad (21)$$

Векторы $E_{J\mathcal{J}}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\nabla E_{J\mathcal{J}} = \omega^K E_{J\mathcal{J}K} \qquad (E_{J\mathcal{J}K} = e_{J\mathcal{J}K} + \Gamma^L_{J\mathcal{J}} e_{LK} + \Gamma^L_{J\mathcal{J}K} e_L),$$

т.е. совокупность векторов $E_{J\mathcal{J}}$ относительно инвариантна. Для неголономного многообразия $\tilde{V}$ векторы $E_{J\mathcal{J}}$ задают подпространство $\tilde{E} \subset \tilde{T}^2$, $\dim \tilde{E} = n^2$, обладающее свойствами:

$$\tilde{T} + \tilde{E} = \tilde{T}^2, \quad \tilde{T} \cap \tilde{E} = 0. \qquad (22)$$

Исследуем подробнее голономное многообразие V с линейной связностью. Симметрируем уравнения (20):

$$\nabla \Gamma^J_{(\mathcal{J}K)} + \omega^J_{\mathcal{J}K} = \Gamma^J_{(\mathcal{J}K)L}\, \omega^L,$$

т.е. объект $\gamma^J_{\mathcal{J}K} = \Gamma^J_{(\mathcal{J}K)}$ задает симметрическую связность, присоединенную к несимметрической в общем случае связности с объектом $\Gamma^J_{\mathcal{J}K}$. Векторы $E_{(J\mathcal{J})} = e_{J\mathcal{J}} + \gamma^K_{J\mathcal{J}} e_K$ определяют подпространство $E \subset T^2$, $\dim E = \frac{1}{2} n(n+1)$ со свойствами вида (22).

Рассмотрим $E_{[J\mathcal{J}]} = S^K_{J\mathcal{J}} e_K$. Обозначим $\tau = \mathrm{rang}\,(S^K_{J\mathcal{J}})$, где значения верхнего индекса нумеруют, например, строки, а сочетания значений пары нижних индексов - столбцы. Тензор кручения $S^K_{J\mathcal{J}}$ задает подпространство $S \subseteq T$, $\dim S = \tau$. При $n \geqslant 3$ число векторов $E_{[J\mathcal{J}]}$ равно $C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) \geqslant n = \dim T$, поэтому в общем случае $\tau = n$, $S = T$. т.е. тензор кручения, вообще говоря, не определяет новое подпространство S. Если $n=2$, то $C_n^2 = 1$, т.е. в этом случае тензор кручения задает I-мерное подпространство S, принадлежащее 2-мерному касательному пространству T. При $n=1$ линейная связность всегда без кручения, поэтому $S=0$. Вообще, вне зависимости от размерности n для симметрической линейной связности $S=0$.

Т е о р е м а 3. Задание линейной связности с кручением в неголономном многообразии $\tilde{V}$ эквивалентно оснащению многообразия полем подпространств $\tilde{E}$, дополняющих касательные пространства $\tilde{T}$ до соприкасающихся пространств $\tilde{T}^2$.

Известно, что линейная связность без кручения в голономном многообразии задается путем его оснащения подпространствами E.

Т е о р е м а 4. Несимметрическая линейная связность голономного многообразия V позволяет задать на нем два поля:

оснащающих подпространств E и касательных подпространств $S \subseteq T$, причем, вообще говоря, при $n > 2$ подпространство $S = T$, но при $n=2$ имеем $\dim S = 1$.

Из равенств (21) вытекает

Т е о р е м а 5. Несимметрическая линейная связность неголономного многообразия $\tilde{V}$ интерпретируется внутри соприкасающегося пространства $\tilde{T}^2$ с помощью проекции $\tilde{T} + d\tilde{T} \xrightarrow{\tilde{E}} \tilde{T}$ смежного касательного пространства $\tilde{T} + d\tilde{T}$ на исходное касательное пространство $\tilde{T}$ вдоль оснащающего подпространства $\tilde{E}$.

Аналогично симметрическая линейная связность голономного многообразия V характеризуется проекцией $T + dT \xrightarrow{E} T$.

З а м е ч а н и я: 4) теорему 3, фактически, доказал А.К.Рыбников [7], [9], который считал голономное многообразие подмногообразием неголономного, точнее, относил многообразие к неголономным и голономным реперам; 5) оснащение голономного многообразия V полем подпространств E не позволяет [9, с.76] задать в нем линейную связность с кручением, следовательно, для интерпретации несимметрической связности многообразия V недостаточно отображения $T + dT \xrightarrow{E} T$.

4. Составное многообразие и главное расслоение. Произведем разбиение значений индексов:

$$J = (i, \alpha); \quad i, j, k = \overline{1,m}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta = \overline{m+1,n}.$$

Запишем уравнения (I) подробнее

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^\alpha \wedge \omega^i_\alpha, \qquad (23)$$

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i. \qquad (24)$$

Пусть выполняются условия

$$\omega^\alpha \wedge \omega^i_\alpha = 0, \qquad (25)$$

тогда уравнения (23) примут вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \qquad (26)$$

а n-мерное голономное (неголономное) многообразие V_n станет составным многообразием в смысле Вагнера [10] : $V_n = M_\tau(V_m)$, где $\tau = n-m$, со структурными уравнениями (24), (26), типовым слоем которого является τ-мерное многообразие M_τ, а базой - многообразие V_m.

Исследуем условия (25). Разрешим их по лемме Картана

$$\omega^i_\alpha = \lambda^i_{\alpha\beta}\, \omega^\beta \qquad (\lambda^i_{[\alpha\beta]} = 0). \qquad (27)$$

Запишем структурные уравнения (3) для форм ω^i_α :

$$d\omega^i_\alpha = \omega^j_\alpha\wedge\omega^i_j + \omega^\beta_\alpha\wedge\omega^i_\beta + \omega^J\wedge\omega^i_{\alpha J}. \qquad (28)$$

Теперь продифференцируем уравнения (27) внешним образом

$$(\nabla\lambda^i_{\alpha\beta} + \omega^i_{\alpha\beta})\wedge\omega^\beta + (\omega^i_{\alpha j} - \lambda^i_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_j)\wedge\omega^j = 0, \qquad (29)$$

$$\nabla\lambda^i_{\alpha\beta} = d\lambda^i_{\alpha\beta} + \lambda^j_{\alpha\beta}\,\omega^i_j - \lambda^i_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha - \lambda^i_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta .$$

Разрешив уравнения (29) по лемме Картана, получим

$$\nabla\lambda^i_{\alpha\beta} + \omega^i_{\alpha\beta} = \lambda^i_{\alpha\beta K}\,\omega^K, \quad \omega^i_{\alpha j} - \lambda^i_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_j = \lambda^i_{\alpha j K}\,\omega^K, \qquad (30)$$

причем $\lambda^i_{\alpha[JK]}=0$. Если $\lambda^i_{\alpha\beta}=0$, то уравнения (30) принимают вид $\omega^i_{\alpha J} = \lambda^i_{\alpha J K}\,\omega^K$. В этом случае $\omega^i_\alpha = 0$ и уравнения (28) обращаются в тождество, т.е. система уравнений $\omega^i_\alpha=0$ вполне интегрируема. Тем самым получена наиболее простая и корректная форма условий (25).

Пусть формы ω^α_β имеют вид

$$\omega^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma, \qquad (31)$$

где $C^\alpha_{\beta\gamma}$ – структурные константы некоторой r-членной группы Ли G_r, тогда из уравнений (24) имеем

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta\wedge\omega^\gamma + \omega^i\wedge\omega^\alpha_i . \qquad (32)$$

Составное многообразие $M_r(V_m)$ превращается в главное расслоение $G_r(V_m)$ со структурными уравнениями Лаптева (26), (32).

Рассмотрим условия (31). Введем формы $\Omega^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma$. Из уравнений (3) с учетом равенств $\omega^i_\alpha = 0$ получим

$$d\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta\wedge\omega^\alpha_\gamma + \omega^i\wedge\omega^\alpha_{\beta i} + \omega^\gamma\wedge\omega^\alpha_{\beta\gamma} . \qquad (33)$$

Теперь найдем внешние дифференциалы форм Ω^α_β :

$$d\Omega^\alpha_\beta = \Omega^\gamma_\eta\wedge(\delta^\eta_\beta\,\omega^\alpha_\gamma - \frac{1}{2}\,\delta^\alpha_\gamma\,C^\eta_{\beta\delta}\,\omega^\delta + \frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\eta) +$$

$$+ \omega^i\wedge(\omega^\alpha_{\beta i} - \frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma_i) + \omega^\gamma\wedge(\omega^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{1}{4}\,C^\alpha_{\gamma\eta}\,C^\eta_{\beta\delta}\,\omega^\delta) .$$

Если справедливы условия

$$\omega^\alpha_{\beta i} = \frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma_i, \quad \omega^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{4}\,C^\alpha_{\gamma\eta}\,C^\eta_{\beta\delta}\,\omega^\delta, \qquad (34)$$

то система уравнений $\Omega^\alpha_\beta = 0$ вполне интегрируема, т.е. корректны условия (31).

С другой стороны, внешние дифференциалы выражений (31) форм ω^α_β имеют вид

$$d\omega^\alpha_\beta = \omega^i\wedge(\frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma_i) + \omega^\gamma\wedge(\frac{1}{2}\,C^\alpha_{\beta\eta}\,\omega^\eta_\gamma), \qquad (35)$$

а их внешние произведения

$$\omega^\gamma_\beta\wedge\omega^\alpha_\gamma = \frac{1}{4}\,C^\eta_{\beta\gamma}\,C^\alpha_{\eta\delta}\,\omega^\gamma\wedge\omega^\delta .$$

Добавляя и вычитая эти внешние произведения в правых частях уравнений (35), получим структурные уравнения (33) при условиях (34), обеспечивающих полную интегрируемость системы $\Omega^\alpha_\beta = 0$, эквивалентной требованиям (31).

5. Тензорность объектов кривизны. В работе [11] найдены сравнения на компоненты объекта кривизны линейной связности в расслоении реперов $L(V_n)$. Изменив обозначения индексов, имеем

$$\nabla R^J_{JKL} - \Gamma^J_{JM}\,\omega^M_{[KL]} + \omega^J_{J[KL]} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^J),$$

где Γ^J_{JM} – объект линейной связности. По теореме I в голономном случае формы ω^M_{KL}, ω^J_{JKL} симметричны по нижним индексам.

Т е о р е м а 6. Объект кривизны R^J_{JKL} линейной связности в расслоении реперов $L(V_n)$ над голономным многообразием V_n является тензором.

В статье [12] получены сравнения на компоненты объекта кривизны геометрической связности с объектом L^α_i в общем расслоении $M_r(V_n)$:

$$\nabla R^\alpha_{ij} - L^\alpha_K\,\omega^K_{[ij]} + L^\beta_{[i}\,(\omega^\alpha_{\beta j]} - \omega^\alpha_{j]\beta}) - L^\beta_{[i}\,L^\gamma_{j]}\,\omega^\alpha_{\gamma\beta} + \omega^\alpha_{[ij]} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^J),$$

где

$$\nabla R^\alpha_{ij} = dR^\alpha_{ij} + R^\beta_{ij}\,\omega^\alpha_\beta - R^\alpha_{Kj}\,\omega^K_i - R^\alpha_{iK}\,\omega^K_j .$$

В случае голономности многообразия $V_n = M_r(V_m)$ формы ω^K_{ij}, ω^α_{ij}, $\omega^\alpha_{\beta j}$, $\omega^\alpha_{\beta\gamma}$ симметричны по нижним индексам.

Т е о р е м а 7. Объект кривизны R^α_{ij} линейной дифференциально-геометрической связности в составном голономном многообразии $M_r(V_n)$ есть тензор.

Компоненты объекта кривизны групповой связности с объектом Γ^α_i в главном расслоении $G_r(V_m)$ удовлетворяют сравнениям [11]:

$$\nabla R^\alpha_{ij} - \Gamma^\alpha_K\,\omega^K_{[ij]} + \omega^\alpha_{[ij]} \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\,\omega^i),$$

где

$$\nabla R^\alpha_{ij} = dR^\alpha_{ij} + R^\beta_{ij}\,\theta^\alpha_\beta - R^\alpha_{Kj}\,\omega^K_i - R^\alpha_{iK}\,\omega^K_j \qquad (\theta^\alpha_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma).$$

Пусть многообразие $V_n = G_r(V_m)$ голономно, тогда формы ω^K_{ij}, ω^α_{ij}, симметричны по нижним индексам.

Т е о р е м а 8. Объект кривизны R^α_{ij} фундаментально-групповой связности в главном голономном расслоении $G_r(V_m)$ образует тензор.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара/ ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139-189.

2. Л у м и с т е Ю.Г. Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т.69. С.434-469.

3. Л у м и с т е Ю.Г. Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p -реперов // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т.5. С.239-257.

4. Л у м и с т е Ю.Г. Связности в расслоенных пространствах с однородными слоями. Тарту, 1977. 64 с.

5. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977. 84 с.

6. Л а п т е в Г.Ф. О внутренних геометриях многообразий, вмещенных в многомерное аффинное пространство. Диссертация. М., 1941. 103 с.

7. Р ы б н и к о в А.К. Соприкасающиеся пространства и связности. I // Вестник МГУ. Мат., мех. 1979. № 6. С.44-48.

8. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Ш и р о к о в А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. 248 с.

9. Р ы б н и к о в А.К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Матем. 1983. № 1. С.73-80.

10. В а г н е р В.В. Теория составного многообразия // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. М.; Л, 1950. Вып.8. С.11-72.

11. Ш е в ч е н к о Ю.И. Связность в продолжении главного расслоения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1991. Вып.22. С.117-127.

12. Ш е в ч е н к о Ю.И. Связность в составном многообразии и ее продолжение // Там же. 1992. Вып.23. С.110-118.

13. Ehresmann C. Extension du calcul des jets aux jets non holonomes // C. r. Acad. sci. 1954. V.239. N25. P.1762-1764.

14. Gheorghiev Gh. Sur les groupes de Lie associes aux prolongements reguliers d'une varieté differentiable // C. r. Acad. sci. 1967. V. 265. N23. P. A779-A782.

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ДВУМЯ ТРЕХКРАТНЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

С.В.Ш м е л е в а

(Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота)

В трехмерном проективном пространстве рассматриваются подклассы конгруэнций $\mathcal{K}_{3,3}$ невырожденных линейчатых квадрик Q , имеющих две невырождающиеся фокальные поверхности $(\mathcal{A}_0)$ и $(\mathcal{A}_3)$, кратность каждой из которых не ниже трех, причем линии на этих поверхностях, огибаемые пересекающимися прямолинейными образующими квадрики Q , соответствуют. Доказаны теоремы существования и установлены геометрические свойства исследуемых подклассов.

1. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – точки пересечения прямолинейных образующих квадрики $Q \in \mathcal{K}_{3,3}$, проходящих через трехкратные фокальные точки $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_3$. Тогда система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{K}_{3,3}$ запишется в виде (см. (1,2) из [1]):

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j \omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^j = c_{ik}\omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^j = \lambda_{ik}\omega^k, \quad \omega_3^i = b_i^i \omega^i, \quad \Omega = h_k \omega^k, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$\begin{cases} \omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i, \quad \Omega \overset{def}{=} \omega_0^0 - \omega_1^1 + \omega_3^3 - \omega_2^2, \\ c_{12} = c_{21}, \quad b_1^1 \lambda_{12} - b_2^2 \lambda_{21} = 0, \quad b_1^1 b_2^2 \neq 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

$i,j,k = 1,2$ и по индексам i и j здесь и в дальнейшем суммирование не производится.

Обозначим:

$$\begin{cases} c = c_{11}c_{22} - c_{12}^2, \quad p_i = c_{ij}a_{jj}^i - c_{jj}a_{ji}^i, \quad q_i = c_{ii}a_{jj}^i - c_{ij}a_{ji}^i, \\ \lambda = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}, \quad \ell_i = \lambda_{ij}a_{ii}^j - \lambda_{ii}a_{ij}^j, \quad v_i = \lambda_{ii}a_{jj}^i - \lambda_{ij}a_{ji}^i, \\ w_i = \lambda_{ji}h_i - \lambda_{jj}h_i, \quad s_i = h_i a_{ij}^j - h_j a_{ii}^j, \quad t_i = c_{ii}\lambda_{ij} - c_{ij}\lambda_{ii}, \\ r_i = c_{ij}h_j - c_{jj}h_i. \end{cases} \tag{1.3}$$